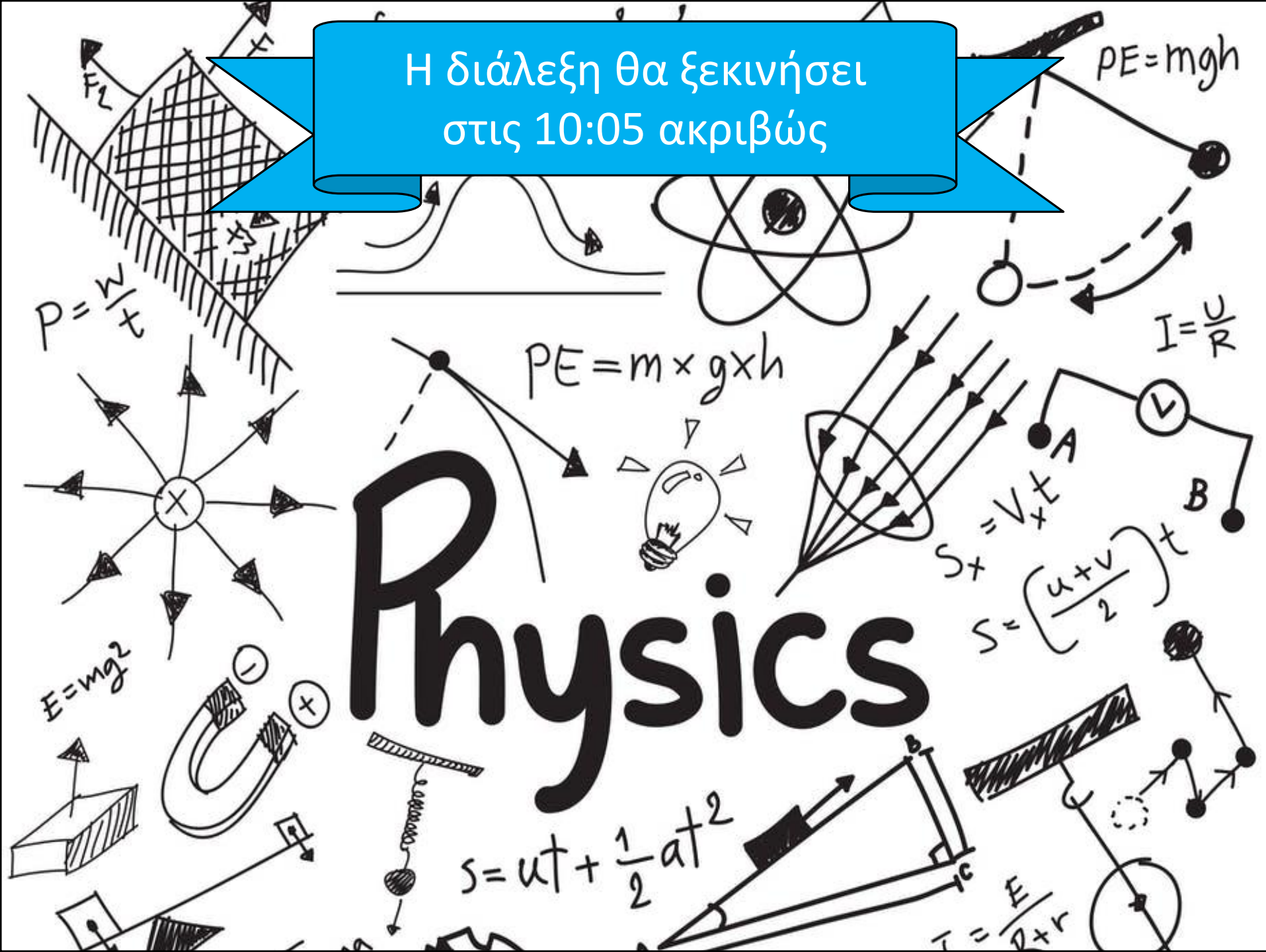


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:05 ακριβώς

Physics





Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

- Ο νόμος του Coulomb

- Η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (μηδενικού μεγέθους) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

όπου k_e είναι η σταθερά του Coulomb

- Σταθερά k_e

- $k_e = 8.987 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

- Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

- όπου $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, και λέγεται **διηλεκτρική σταθερά του κενού**

- Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο που έχει βρεθεί στη φύση είναι $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

- Ηλεκτρικό πεδίο

- Ηλεκτρικό Πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου: η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0 , δια το φορτίο αυτό

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

- Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο P λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q δίνεται ως

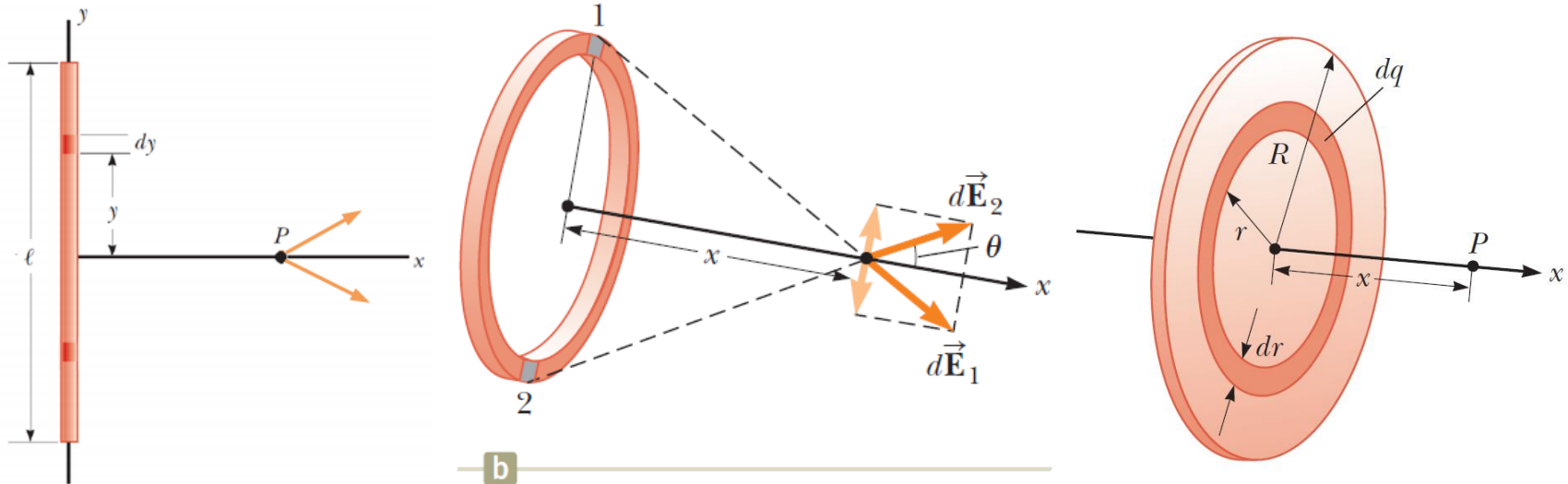
$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P δίνεται ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2}$$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

Κατανομές φορτίων



$$E_P = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + (l/2)^2}}$$

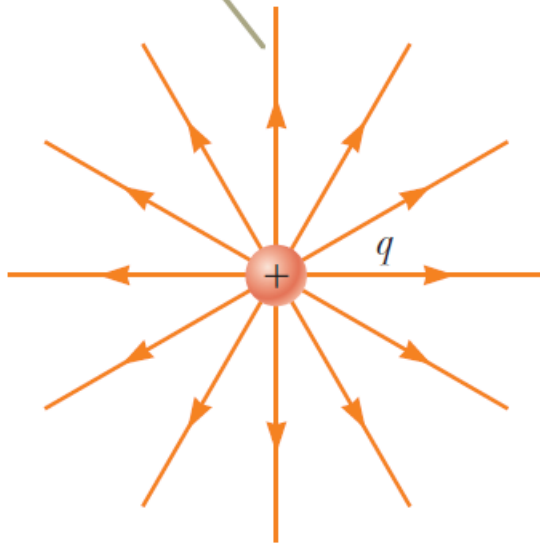
$$E_P = k_e \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_P = 2\pi\sigma k_e \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

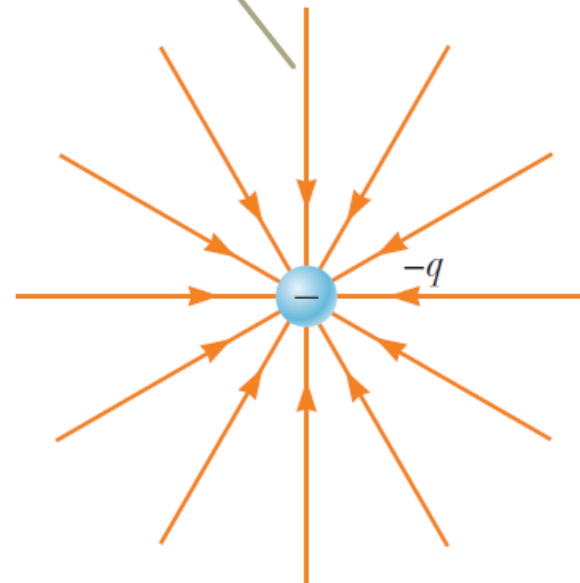
Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Για ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω.



a

Για ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα μέσα.

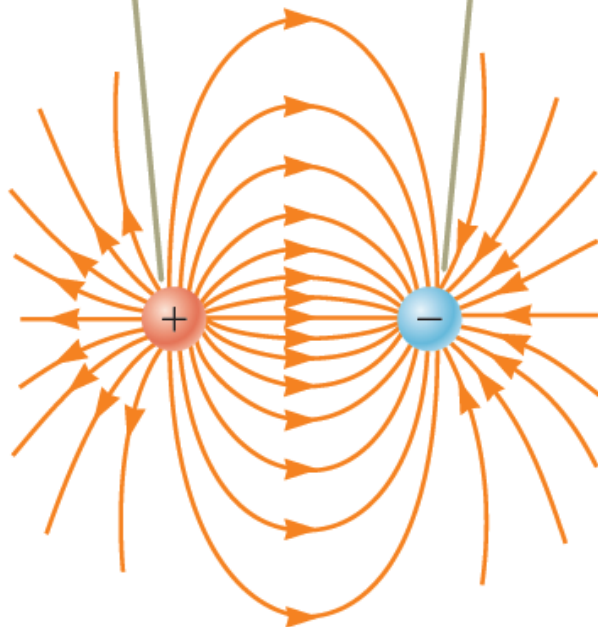


b

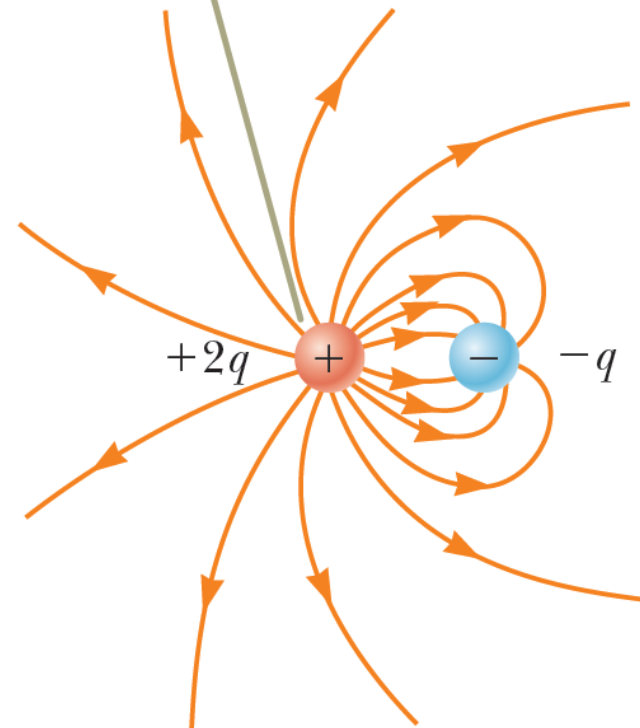
Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

● Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.



Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το $+2q$ για κάθε μια που τερματίζει στο $-q$.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**

- Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q
- Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
- Ομογενές: **σταθερό** μέτρο, **παράλληλες** δυναμικές γραμμές που ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία

- Επιταχυνόμενη κίνηση λόγω ηλεκτρικής δύναμης

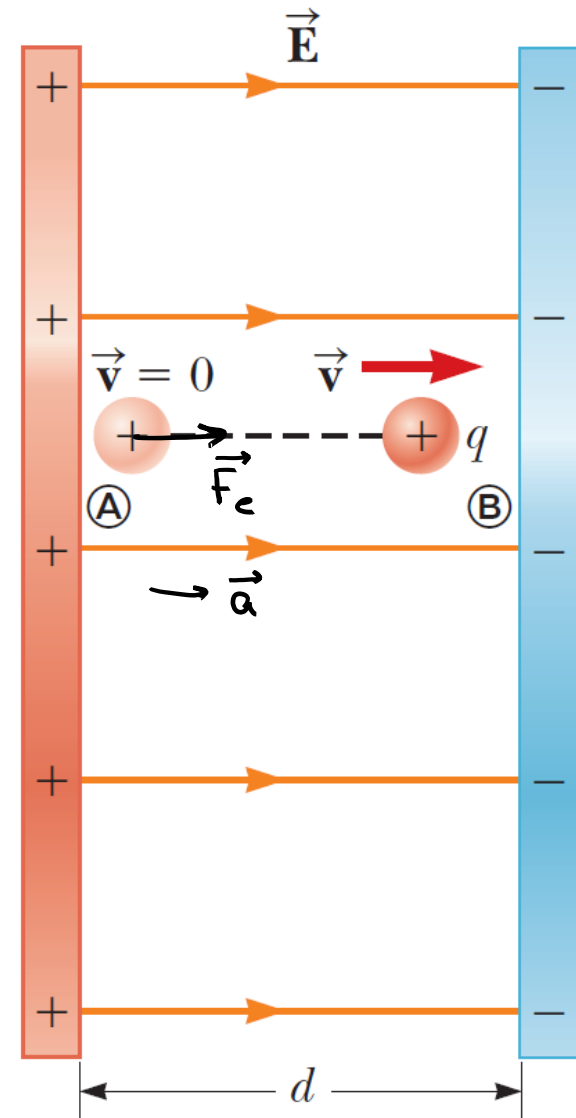
$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

- Αν το σωματίδιο έχει **θετικό** φορτίο, η κίνησή του ακολουθεί την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου
- Αλλιώς, η κίνηση είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου

Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με κατεύθυνση επάνω στο x -άξονα ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση d , όπως στο σχήμα. Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.
Α) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.
Β) Υπολογίστε το Α) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.

A) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.

Το σώμα μάζας m κ' φορτίου q εκτελεί
εξώθηρ ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Άρα :

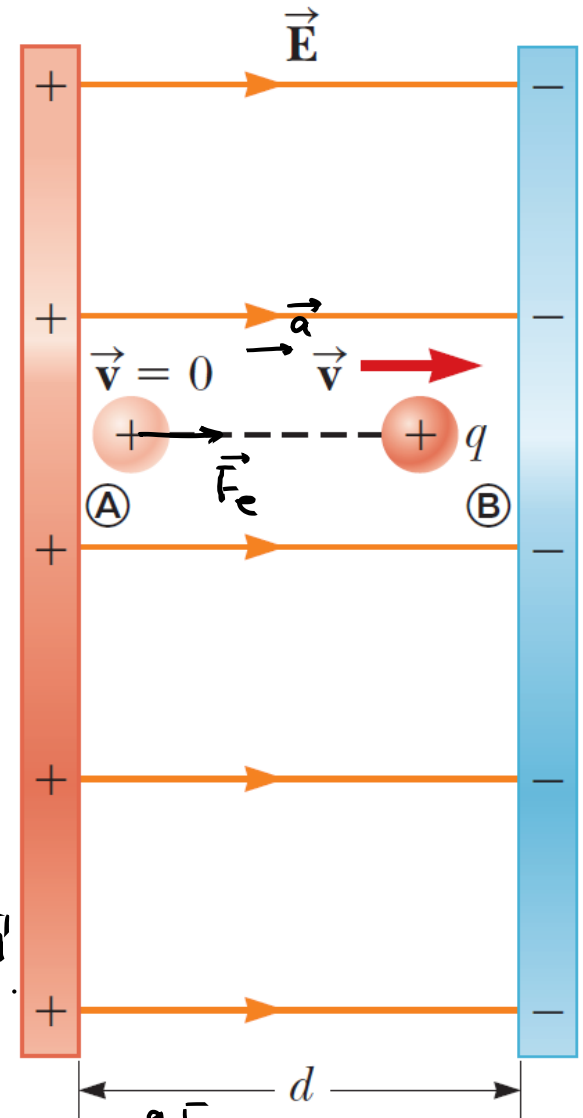
$$u_B^2 = \cancel{u_A^2} + 2a_x \Delta x$$

$$u_B^2 = 2a_x \Delta x$$

$$= 2a_x \cdot d \quad (1) \quad \Rightarrow u_B = + \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad (2)$$

2^ο Ν. Newton :

$$\Sigma F_x = ma_x \Leftrightarrow F_e = ma_x \Leftrightarrow qE = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{qE}{m} \quad (3)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.

B) Υπολογίστε το A) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.

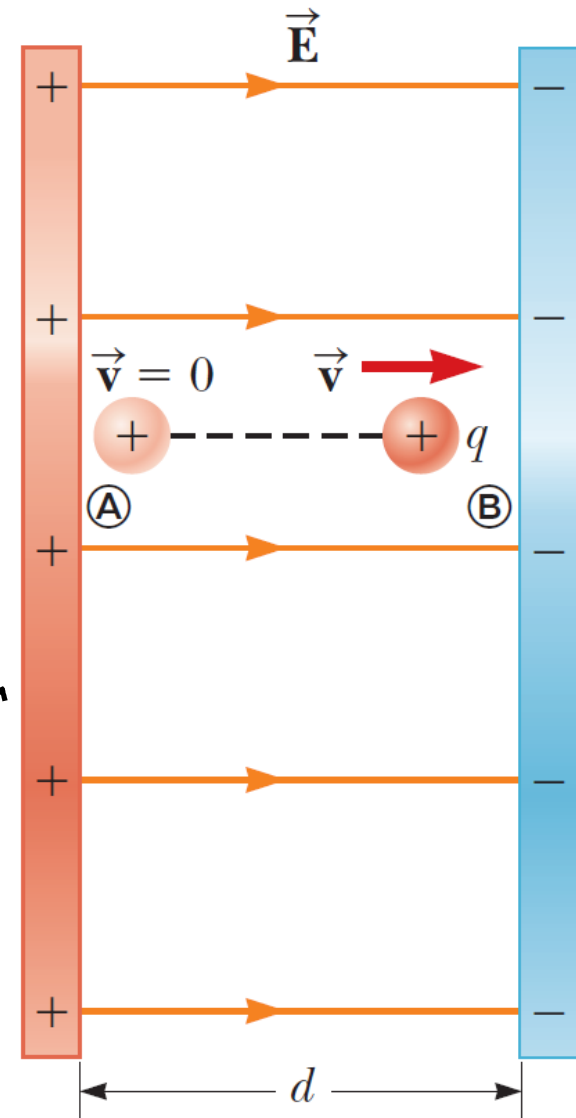
Θεωράμε ως σύστημα το φορτίο. Άρα η F_e είναι εξωτερική δύναμη που ασκείται στο φορτίο.

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.Ε. } A \rightarrow B: \Delta K_{A \rightarrow B} = W_{F_e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_B - K_A = W_{F_e} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F_e \cdot d$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = q E \cdot d \Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2 q E d}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B = + \sqrt{\frac{2 q E d}{m}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα:

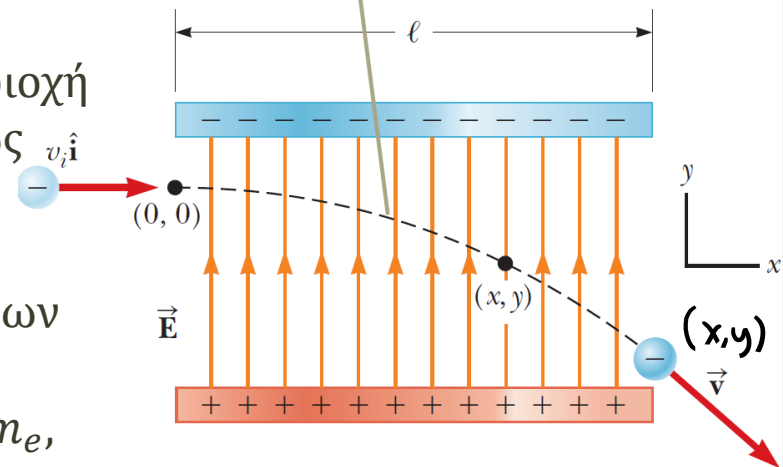
- ◉ Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$. Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e , καθώς και το φορτίο του, e .

A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

B) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



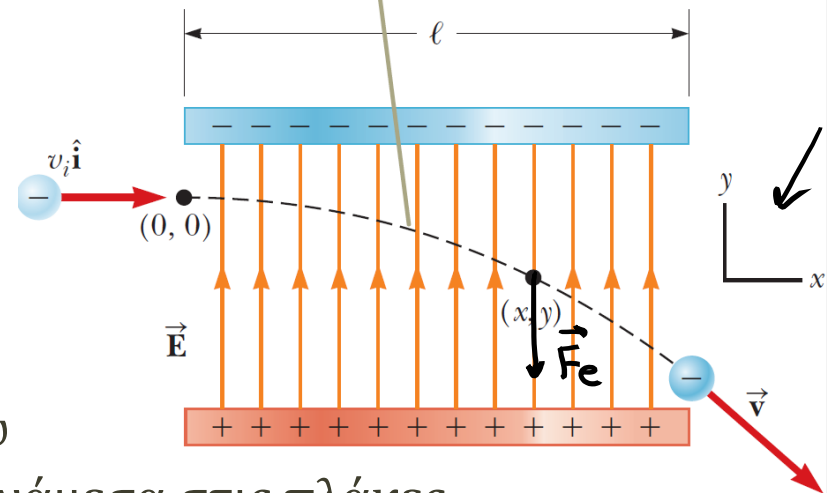
Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$.

A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται λόγω του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο προκαλεί $\vec{F}_e$ πάνω στο φορτίο. Η φορά της $\vec{F}_e$ είναι αντίθετη της φοράς των δυναμικών γραμμών. Η επιτάχυνση συμβαίνει μόνο στα άξονα $y'y$. Άρα:

$$\sum \vec{F}_y = m_e \vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_e = m_e \vec{a}_y \Rightarrow -F_e = m_e a_y \Rightarrow a_y = -\frac{F_e}{m_e} = -\frac{eE}{m_e}$$

$qE = eE$

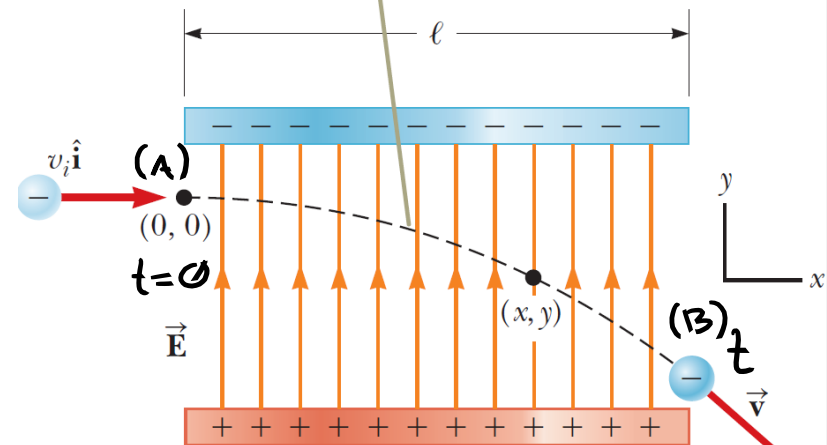
Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$.

Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Ουσιαστικά ζητάμε το χρόνο να απαιτείται για να διανύσει το ηλεκτρόνιο απόσταση ίση με l (να είναι το μήκος των πλακών). Είναι:

$$x_B = x_A + u_x t = 0 + u_i t \Leftrightarrow l = u_i t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{l}{u_i} = \frac{10^{-1}}{3 \cdot 10^6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$.

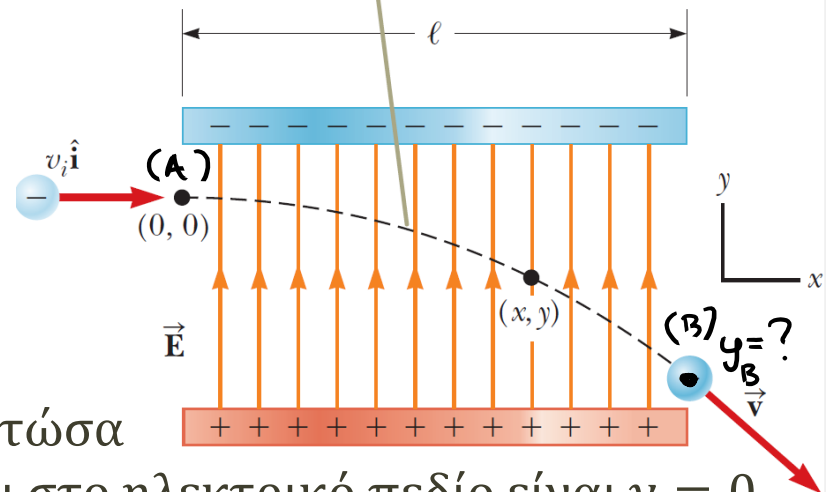
Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Στην y -άξονα, το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση εντός του πεδίου. Άρα:

$$y_B = y_A + u_{iy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Leftrightarrow y_B = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(-\frac{eE}{m_e} \right) \left(\frac{l}{u_i} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow y_B = -\frac{eE l^2}{2m_e u_i^2} \approx -0.0195 \text{ m}$$

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.





Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss



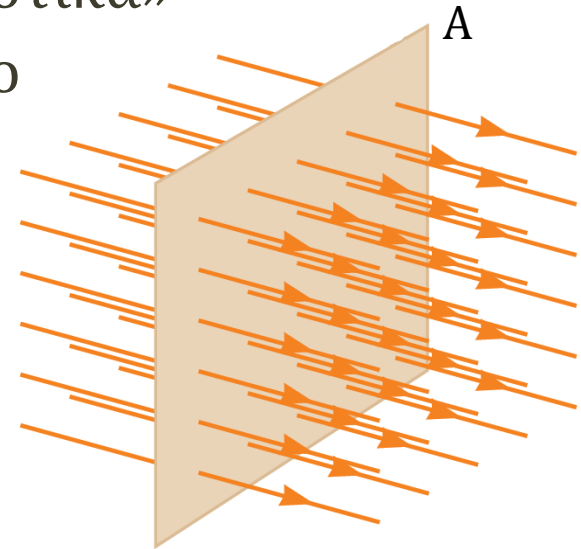
Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών ποιοτικά
- Τώρα, θα το μελετήσουμε πιο «ποσοτικά»
- Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
 - Οι δυναμικές γραμμές περνούν **κάθετα** την επιφάνεια εμβαδού A
 - Θυμηθείτε: πυκνότητα γραμμών ανάλογη του μέτρου του πεδίου
 - Ο αριθμός γραμμών είναι **ανάλογος** του γινομένου EA
- Αυτό το γινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή Φ_E**
 - **Σημείωση:** Δεν υπάρχει **τίποτα** «ρευστό» στην όλη κατάσταση – το πεδίο είναι στατικό, είναι απλά ένα (ατυχές?) όνομα που περιγράφει το πεδίο! 😊



Ο νόμος του Gauss

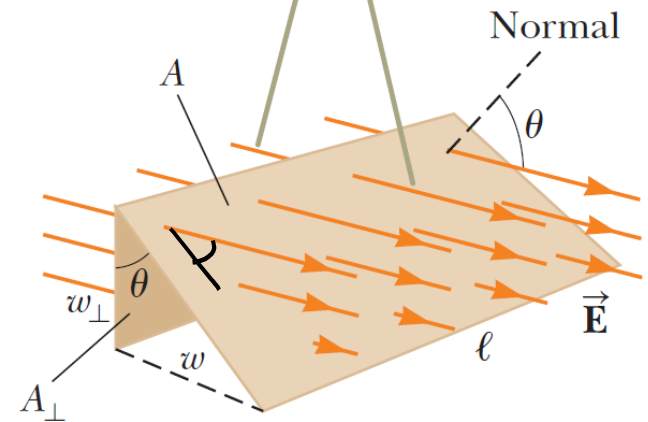
● Ηλεκτρική Ροή

- Αν η επιφάνεια δεν είναι κάθετη τότε η ηλεκτρική ροή δίνεται ως

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos(\theta)$$

- Πώς προκύπτει η σχέση αυτή?
- Προβάλλουμε την επιφάνεια A σε ένα επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές
- Η προβολή αυτή αντιστοιχεί σε επιφάνεια $A_{\perp}$, όπως στο σχήμα
- Η επιφάνεια αυτή έχει εμβαδό $A \cos(\theta)$
- Αν $\theta = 90^\circ$, η επιφάνεια A είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές
 - Στην περίπτωση αυτή έχουμε ηλεκτρική ροή ίση με μηδέν

Ο αριθμός των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια $A_{\perp}$ είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια A .

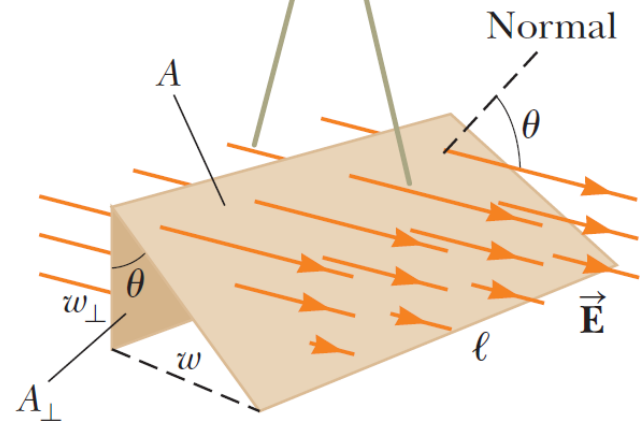


Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Όμως το πεδίο μπορεί να μην είναι ομογενές
 - Μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με την επιφάνεια
- Ο ορισμός που δώσαμε έχει νόημα για μικρές επιφάνειες με **σταθερό ηλεκτρικό πεδίο**
 - Θα αποδειχθεί όμως «θησαυρός»! ☺
- Το $EA \cos(\theta)$ πρέπει να σας θυμίζει κάτι...
 - Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{E} \cdot \vec{A}$!
 - Το E είναι διάνυσμα, πράγματι...
 - Το A είναι εμβαδό (αριθμητική τιμή)!!

Ο αριθμός των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια $A_{\perp}$ είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια A .

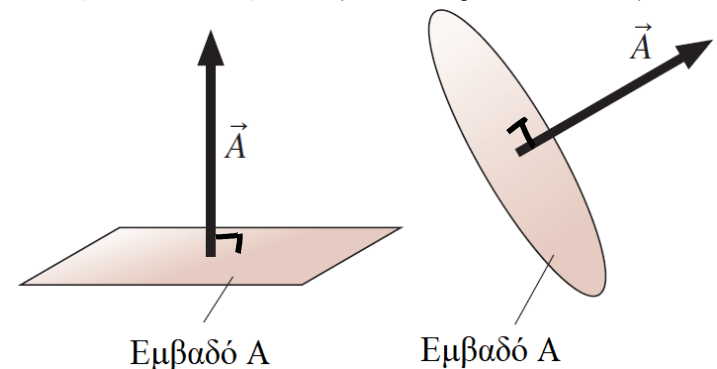


Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα $\vec{A}$ το οποίο θα είναι πάντα κάθετο σε μια επιφάνεια που θα του αντιστοιχίσουμε
- Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ότι το μέτρο του διανύσματος αυτού θα είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία αντιστοιχίζεται! ☺
- Τώρα μπορούμε να γράψουμε την ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου μιας επιφάνειας ως ένα εσωτερικό γινόμενο!

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

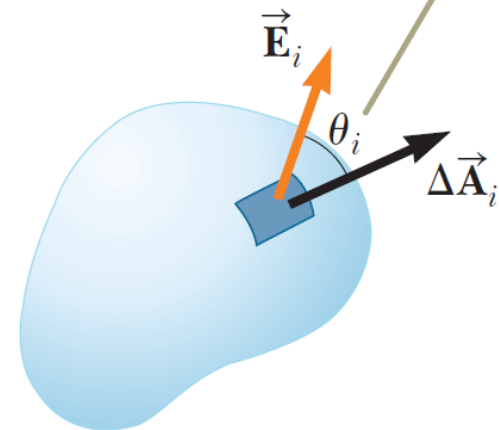


Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας καθένα με εμβαδό ΔA
- Ας ορίσουμε το διάνυσμα $\vec{\Delta A}_i$ του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του i -οστού στοιχείου
 - Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού ΔA_i της επιφάνειας
 - Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}_i$ στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\vec{\Delta A}_i$
 - ... όπως στο σχήμα

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\vec{\Delta A}_i$, που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



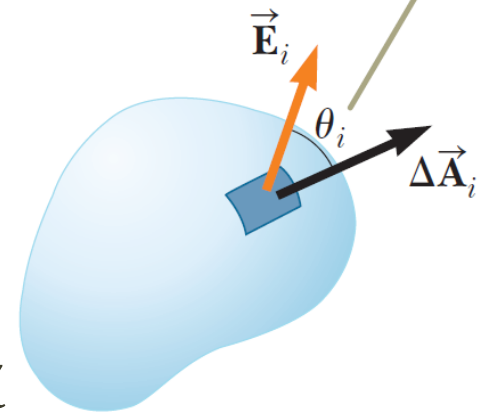
Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια αυτή είναι

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{E_i} &= \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i \\ &= E_i(\Delta A_i) \cos(\theta_i)\end{aligned}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$, που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



- Η συνολική ηλεκτρική ροή Φ_E μπορεί να βρεθεί αν αθροίσουμε τις συνεισφορές $\Delta\Phi_{E_i}$ από όλα τα (απειροστά) μικρά τμήματα επιφάνειας ΔA_i
- Έτσι,

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Phi_{E_i} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

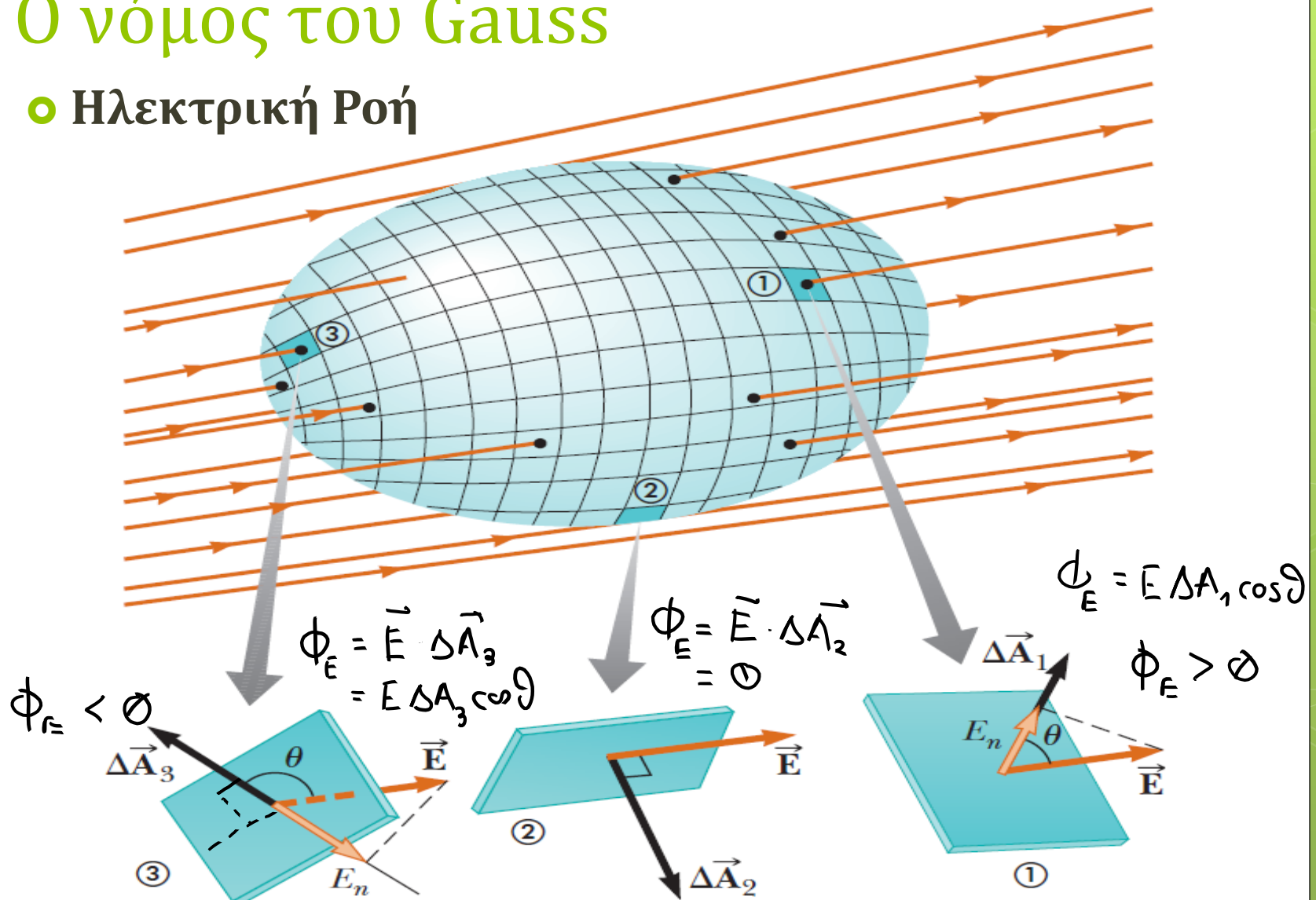
Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Μας ενδιαφέρουν οι κλειστές επιφάνειες για την εύρεση της ηλεκτρικής ροής διαμέσου των επιφανειών αυτών
- Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου
- Π.χ. η επιφάνεια μιας σφαίρας
- Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που το ηλεκτρικό πεδίο, ως διάνυσμα, επιδρά σε τμήματα μιας κλειστής επιφάνειας

Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή



Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Είπαμε ότι μια κλειστή επιφάνεια έχει «εσωτερικό» και «εξωτερικό»
 - Το διάνυσμα $d\vec{A}$ ενός τμήματος της κλειστής επιφάνειας πάντα δείχνει προς τα «έξω»
 - Σε αντίθεση με μια απλή επιφάνεια (όχι κλειστή), η οποία έχει $d\vec{A}$ που μπορεί να δείχνει προς τη μια ή την άλλη πλευρά της
- Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

κάθετο στην επιφάνεια (ω διάνυσμα)

με E_n τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια (ή εναλλακτικά, παράλληλη με το διάνυσμα $d\vec{A}$)

Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Με βάση τις ως τώρα παρατηρήσεις μας, η **συνολική ηλεκτρική ροή Φ_E** διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι **ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που εισέρχονται στην επιφάνεια**
- «Μπαίνουν» περισσότερες δυναμικές γραμμές απ'όσες «βγαίνουν»?
 - Αρνητική Φ_E διαμέσου της επιφάνειας
- «Βγαίνουν» περισσότερες δυναμικές γραμμές απ'όσες «μπαίνουν»?
 - Θετική Φ_E διαμέσου της επιφάνειας

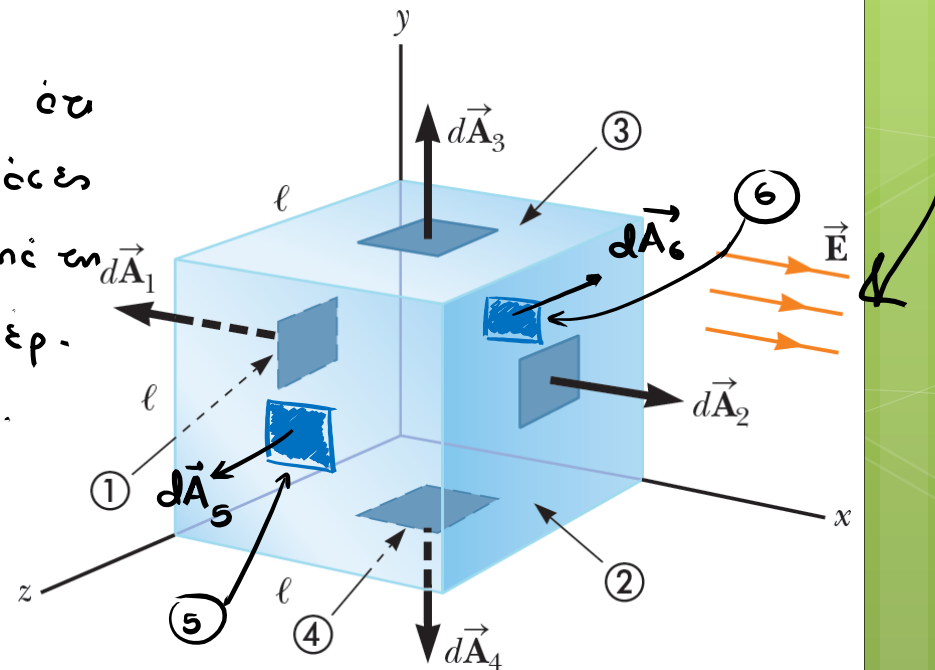
Ο νόμος του Gauss

● Παράδειγμα:

- Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με προσανατολισμό στο x-άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής ℓ τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο σχήμα. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

Από το προηγ. slide, περιμέναμε ότι η ϕ_E θα είναι μηδενική: γιατί όλες δυναμικές γραμμές εισέρχονται από μια πλευρά του κύβου, τες εξέρχονται από την "ανέναντι" πλευρά.

$$\text{Άρα } \phi_E = 0!$$



Ο νόμος του Gauss

● Παράδειγμα - Λύση:

- Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

$$\text{Είνα } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

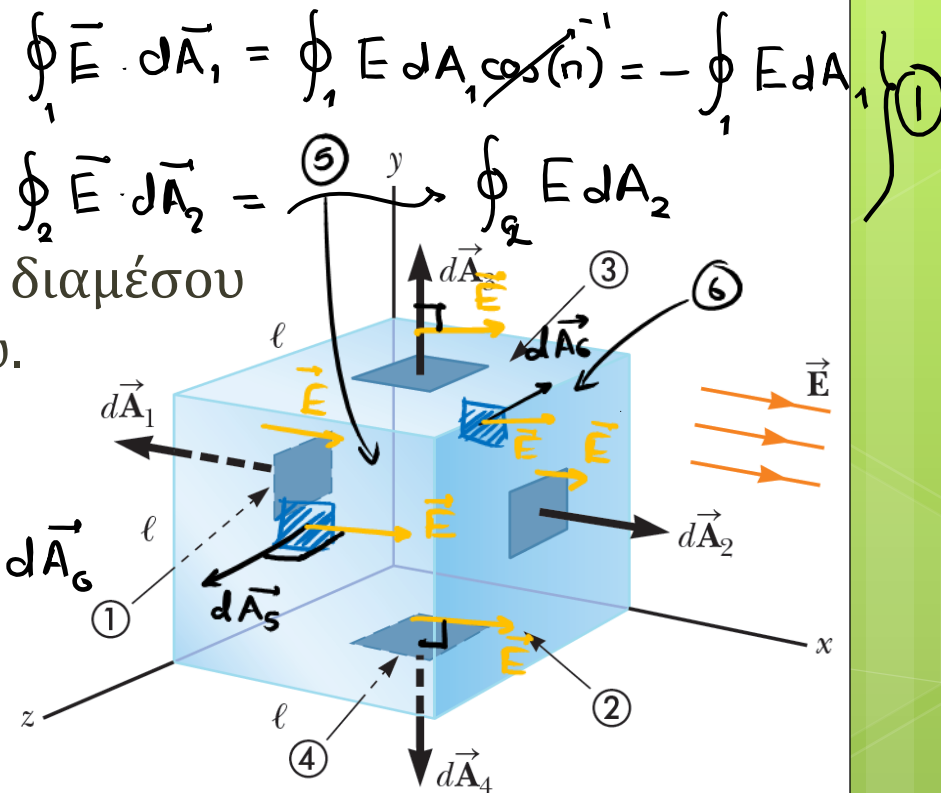
$$= \oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \dots + \oint_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}_6$$

Παρατηρούμε ότι $\Phi_3 = \Phi_4 = 0$,
γιατί $\vec{E} \cdot d\vec{A}_3, \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 = 0$

Επίσης $\Phi_5 = \Phi_6 = 0$, για τον ίδιο λόγο. Άρα τελικά:

$$\Phi_E = \oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 \stackrel{①}{=} - \oint_1 E dA_1 + \oint_2 E dA_2 = 0$$

γιατί τα $\oint_1 E dA_1, \oint_2 E dA_2$ έχουν την ίδια τιμή, ως ηλεκτρικές ροές διαμέσου πλευρών κύβου (ίσα εμβαδά πλευρών, ίδιο E).



Ο νόμος του Gauss

• Ο νόμος του Gauss

- Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και ενός φορτίου που περικλείεται σε αυτήν;
- Η απάντηση είναι ΝΑΙ, και αυτή η σχέση ονομάζεται **νόμος του Gauss**
- Είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη ηλεκτρικών πεδίων
 - Είναι το ισοδύναμο του νόμου του Coulomb για ηλεκτρικά πεδία σημειακών φορτίων, αλλά εφαρμόζεται σε συνεχείς κατανομές φορτίων πολύ πιο εύκολα απ' ότι ο νόμος του Coulomb
 - Μπορεί να εφαρμοστεί σε **κινούμενα** φορτία κάθε ταχύτητας
- Αποτελεί ένα περισσότερο θεμελιώδη νόμο για τα ηλεκτρικά πεδία από το νόμο του Coulomb
- Η κλειστή επιφάνεια λέγεται πολλές φορές και **γκαουσιανή** (Gaussian)

Ο νόμος του Gauss

● Ο νόμος του Gauss

- Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

- Οι δυναμικές γραμμές είναι **παντού** κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας

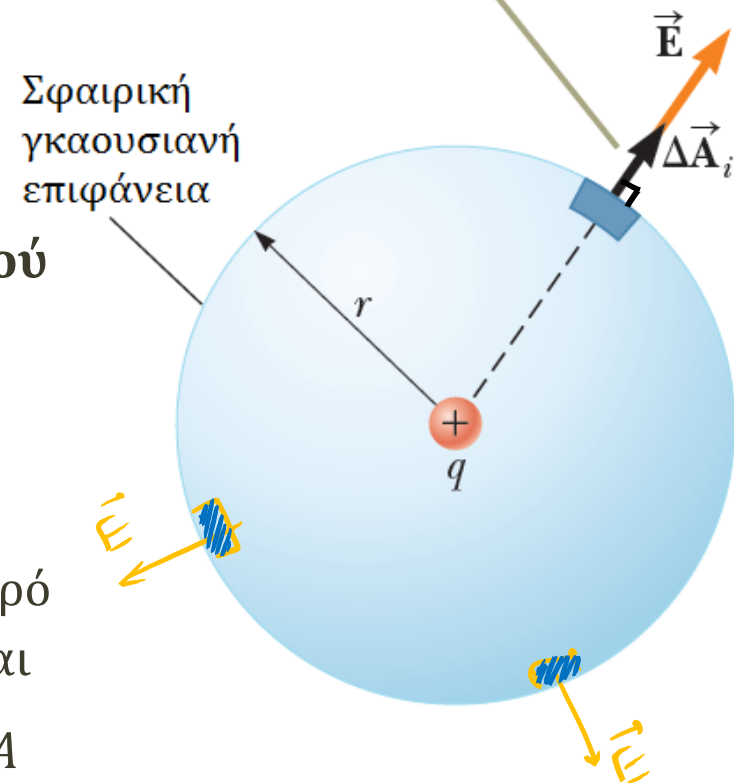
- Άρα το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\Delta A}$

- Έστω ότι το $\Delta \vec{A}$ γίνεται πολύ μικρό

- Η συνολική ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.



Ο νόμος του Gauss

- Ο νόμος του Gauss
- Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ ισούται με το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας

$$\oint dA = 4\pi r^2$$

- Άρα

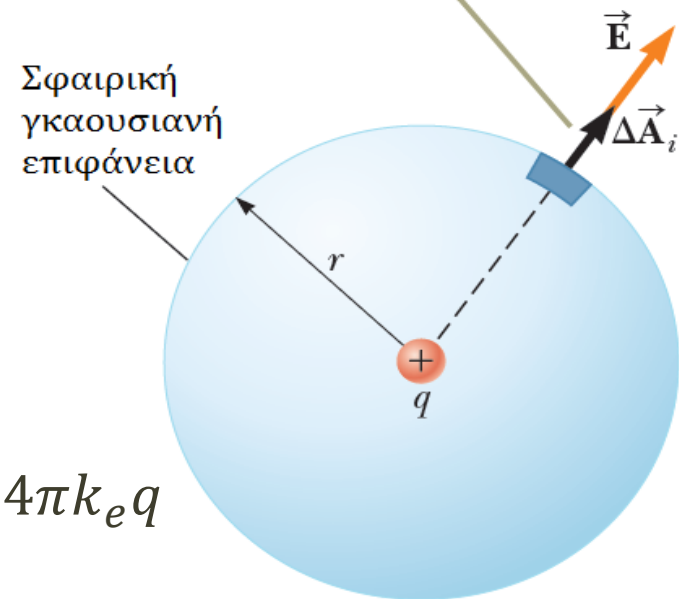
$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

- Όμως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

- Άρα τελικά

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.

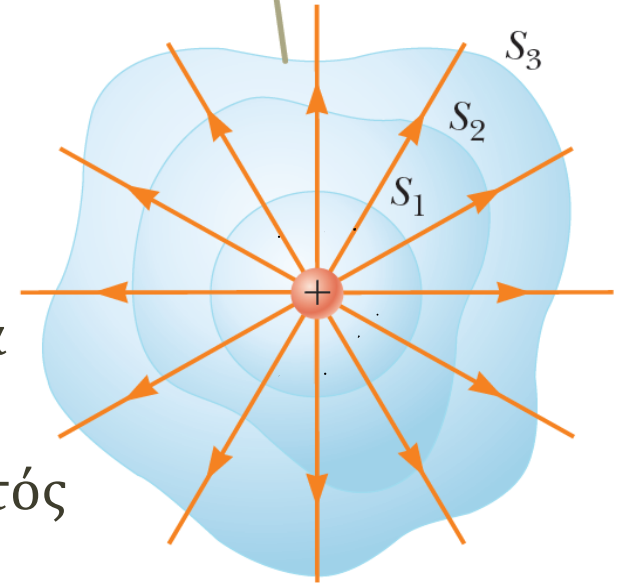


Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;
- Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια
- Το σχήμα δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες!
- Η S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$
- Άρα **η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\Phi_E = q/\epsilon_0$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.**

Η ηλεκτρική ροή είναι η ίδια διαμέσου όλων των επιφανειών.

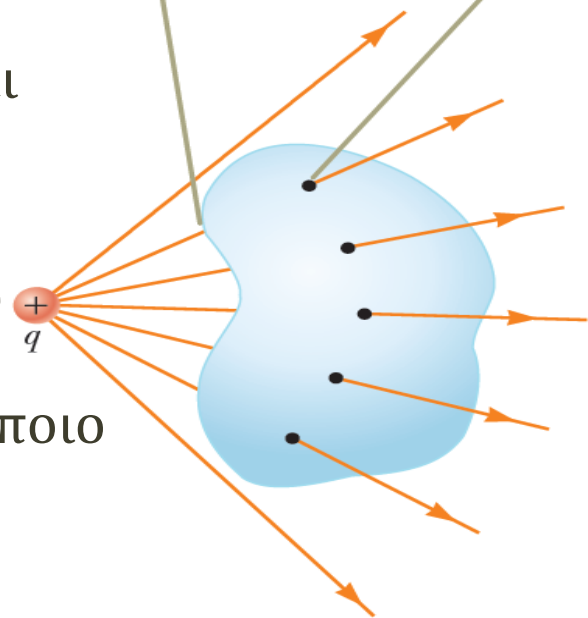


Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Και τι θα συμβεί αν το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;
- Κάθε δυναμική γραμμή του πεδίου του φορτίου που εισέρχεται στην κλειστή επιφάνεια βγαίνει από κάποιο άλλο μέρος της
- Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν
- Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας που **δεν** περιέχει φορτίο είναι **μηδέν**!

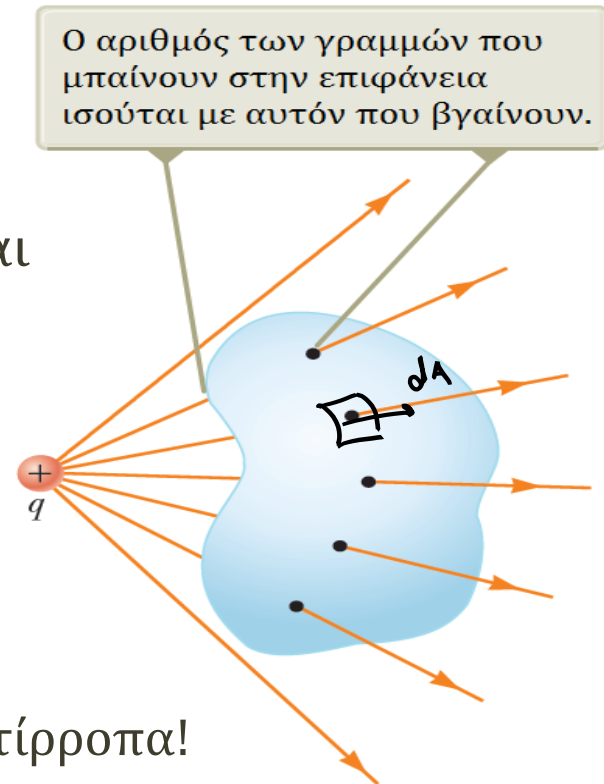
Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν στην επιφάνεια ισούται με αυτόν που βγαίνουν.



Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Το προηγούμενο αποδεικνύεται και μαθηματικά
- Έστω θετικό φορτίο q
- Η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας μικρής επιφάνειας ΔA της επιφάνειας «εισόδου» των δυναμικών γραμμών είναι αρνητική!
 - Γιατί τα διανύσματα $\Delta \vec{A}, \vec{E}$ είναι αντίρροπα!
- Αντίθετα, η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας εξίσου μικρής επιφάνειας ΔA της επιφάνειας «εξόδου» των δυναμικών γραμμών είναι θετική!
 - Γιατί τα διανύσματα $\Delta \vec{A}, \vec{E}$ είναι ομόρροπα!
- Το άθροισμα των ηλεκτρικών ροών είναι μηδέν





Συνεχίζεται... 😊
